

Devoir libre

Exercice1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice2

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la différentiabilité de f sur \mathbb{R}^2 .
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Que peut on en déduire?

Exercice3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice4

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y) & \text{si } xy \neq 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, y = 0, \\ y^2 \sin(1/y) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $(0, 0)$.
2. Montrer que, par contre, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$ n'existent pas.

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(r, \theta) = f(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta).$$

Vérifier que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta),$$

$$\text{où } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On définit la fonction $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(r, \beta, \theta) = f(x = r \sin \beta \cos \theta, y = r \sin \beta \sin \theta, z = r \cos \beta).$$

Vérifier que, pour tout $(r, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \{t \in \mathbb{R}; t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta f(r \sin \beta \cos \theta, r \sin \beta \sin \theta, r \cos \beta) &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \beta, \theta) + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \beta, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}(r, \beta, \theta) \\ &+ \frac{1}{r^2 (\sin \beta)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \beta, \theta) + \frac{\cot \beta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \beta}(r, \beta, \theta), \end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré α et de classe C^2 . Montrer que

$$\alpha(\alpha - 1)f(x, y) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

3. En effectuant le changement de variable $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$, déterminer toutes les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ homogènes de degré 1 et de classe C^2 .

Exercice 7

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = \arcsin \left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Trouver un ouvert U de \mathbb{R}^2 sur lequel f est différentiable. Calculer $df(x, y)$ pour $(x, y) \in U$.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..